EXTRAPOLATION PROPERTIES OF INTERPOLATION SCALES

K.V. Lykov

The paper describes the relationship between interpolation and extrapolation constructs. For some class of interpolation spaces obtained by the real interpolation method, an extrapolation description is presented. It is shown that for such spaces it is possible to replace the $\mathcal{K}$-functional in the interpolation description by a parametrized family of norms of exact interpolation spaces with characteristic functions t^θ, $\theta \in (0,1)$ (in particular, by the family of norms of Peetre's spaces).

Keywords: interpolation spaces, interpolation functor, extrapolation spaces, Peetre's spaces, the real interpolation method.

УДК 517.53: 517.947.942

ОБ АНАЛОГЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С $K_{I,S}$- ИЛИ $K_{O,S}$-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Н. Малютина[1], К.А. Алипова[2]

1 *nmd@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет
2 *aka@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В настоящей работе продолжается исследование дифференциальных и экстремальных свойств негомеоморфных отображений с $(K_{I,s}, K_{O,s})$-усредненной характеристикой. В теории плоских квазиконформных отображений для решения экстремальных задач развит и с успехом применяется вариационный метод [2, 3, 9]. Мы предлагаем попытку применить этот классический метод для решения экстремальных задач в классе отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, вариация, экстремальное отображение.

Пусть $f\colon D \to R^n$ — отображение класса $W^1_{n,loc}(D)$. Тогда почти всюду в D определены величины $|\nabla f(x)| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $J(x,f) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$, и если $J(x,f) \ge 0$ почти всюду, тогда определены локальные характеристики $H_I(x,f) = \frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$, $H_O(x,f) = \frac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$.

Рассмотрим две ограниченные области D и D^* в евклидовом пространстве R^n, для которых существует отображение $f\colon D \to D^*$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$ — открытое, непрерывное, удовлетворяющее условиям $f_i(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$, т.е. $\forall x \in D$ существует U-окрестность точки $x \in D$ такая, что $f_j|_U \in W^1_n(U)$, $f^{-1}_{i,j}(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$.

Отображение f называется отображением с $K_{I,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой (с $K_{O,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой), если

$$K_{I,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D \left(\frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}\right)^s d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le K_{I,s}(f), \tag{1}$$

$$K^*_{I,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D \left(\frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}\right)^s |J(x,f)|d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le K^*_{I,s}(f),$$

$$K_{O,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D \left(\frac{L^n(x,f)}{|J(x,f)|}\right)^s d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le K_{O,s}(f), \tag{2}$$

$$K^*_{O,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D \left(\frac{L^n(x,f)}{|J(x,f)|}\right)^s |J(x,f)|d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le K^*_{O,s}(f),$$

здесь $s \ge 1$, $|D|$ — n-мерная мера Лебега области D.

Обозначим через $K_{I,s}(D,D^*)$ и $K^*_{I,s}(D,D^*)$ совокупность отображений $f\colon D \to D^*$, таких что $K_{I,s}(f)$ и, соответственно, $K^*_{I,s}(f)$ конечны ($K_{O,s}(f)$ и, соответственно, $K^*_{O,s}(f)$ конечны). Дифференцируемость таких отображений доказана в [1].

Отображение $f\colon D \to D^*$ называется экстремальным в некотором классе K из $K_{I,s}$ (или из $K^*_{I,s}$), если $f \in K$ и $K_{I,s}(f) \le K_{I,s}(g)$ (или $K^*_{I,s}(f) \le K^*_{I,s}(g)$) для всех $g \in K$.

Функционалы (1), (2) являются интегральной характеристикой отображения с s–усредненной характеристикой. Эти функционалы инвариантны относительно мебиусовых преобразований.

Лемма 1. *Для любого $f \in K_{I,s}(D,D^*)$ $\left(K^*_{I,s}(D,D^*)\right)$ класс допустимых вариаций не пуст. Для квазиконформных отображений это утверждение доказано в [4].*

Лемма 2. *Пусть $f\colon D \to D^*$ — экстремальное отображение с s–усредненной характеристикой. Тогда для него справедливы тождества*

$$\int\limits_D \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(\lambda^s(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx = 0,$$

$$\int\limits_D \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(K_{O,s}(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx = 0,$$

$$\int\limits_D \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(K_{I,s}(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx = 0,$$

для любой функции $\omega(x) = \zeta(f(|x|))$, где $\zeta(y)$ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Лемма 3. *Пусть $f\colon D \to D^*$ — экстремальное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда для него справедливы тождества*

$$\int\limits_D \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial a^i_j}(K^*_{I,s}(x,f)) \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x_j}d\sigma_x = 0, i = 1,2,\ldots,n,$$

где $\omega(x) = \zeta(f(x))$, ζ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Лемма 4. *Пусть* $f\colon D \to R^n$ *— непрерывное отображение с* s*-усредненной характеристикой класса* $C^1(D)$ *и* $J(x_0, f) \neq 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in D$*. Тогда существует шар* $B(x_0, \rho)$ *такой, что* $\forall h$*,* $|h| < \rho$*, с соответственным выбором* ρ *[5, lemma 2.12]* $\forall t$*,* $0 \le t \le 1$*, отображение*

$$f_t(x, h, p) = f(x) + t(f(x + he_p) - f(x)),$$

где e_p *—* p*-ый единичный координатный вектор в* R^n*, определено и является гомеоморфизмом в* $B(x_0, \rho)$ *для любого* $p = 1, 2, \ldots, n$*.*

Теорема 1. *Пусть* $s \ge \frac{2}{n-2}$ *и отображение* $f\colon D \to D^*$ *есть экстремальное отображение в классе* $K_{I,s}(D, D^*)$*. Тогда* $f \in W_2^2(D')$ *для любой подобласти* D' *такой, что* $J(x, f) > 0$ *на замыкании* $\overline{D'}$ *и* $\overline{D'} \subset D$*.*

Теорема 2. *Пусть* $f\colon D \to D^*$ *есть экстремальное отображение в классе* $K^*_{I,s}(D, D^*)$ *и* $s \ge 1$*. Тогда* $f \in W_2^2(D')$ *для любой подобласти* D' *такой, что* $J(x, f) > 0$ *на замыкании* $\overline{D'}$ *и* $\overline{D'} \subset D$*.*

Замечание 1. *Аналогичные утверждения справедливы и для других характеристик в силу связывающих их неравенств [6].*

Замечание 2. *В [7] теорема 1 доказана для отображений квазиконформных в среднем.*

Замечание 3. *Нами доказано [8], что существует такое число* r_0*, что в окрестности радиуса* r_0 *существуют обратное отображение* f_j^{-1}*, причем из сходимости интеграла с характеристикой* $K_{I,s}$ *для отображения* f *следует сходимость интеграла с* $K_{O,s}$ *для* f_j^{-1}*, теперь можно определить характеристики вида*

$$K(f) = \frac{1}{|D|}\int\limits_D K_I(x, f)\, d\sigma_x + \frac{1}{|D^*|}\int\limits_D K_I(x, f^{-1})\, d\sigma_y.$$

Замечание 4. *Для характеристики* $\lambda(x, f) = n^{-\frac{n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x, f)|}$ *отображений с ограниченным искажением см. [2].*

В [10] приведены примеры отображений с s-усредненной характеристикой, а также показано отличие данного класса отображений от класса отображений с ограниченным искажением.

Литература

1. Малютина А. Н., Елизарова М. А. *Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой* // Вест. Томск. ун-та. Математика и механика. – № 300 (1). – 2007. – С. 124–129.

2. Стругов Ю. Ф. *Вариационные задачи в классе квазиконформных в среднем отображений.* Учебное пособие. – Омск, 2005. – 125 с.

3. Стругов Ю. Ф. *Вопросы метрической теории отображений и её применение.* – Киев, Наук. думка. – 1978. – Т. 243. – № 5. – С. 135–142.

4. Стругов Ю. Ф. *Об одном дифференциальном свойстве экстремального отображения, квазиконформном в среднем* // ДАН СССР. – Т. 243. – № 5. – 1978. – С. 1138–1141.

5. Martio O., Rickman S., Vaisala J. *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – No. 448. – 1969. – 40 p.

6. Сычев А. В. *Пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1975.

7. Стругов Ю. Ф. *Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения* // В сб. Динамика сплошной среды, вып. 25. – 1976. – С. 154–157.

8. Елизарова М. А., Малютина А. Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства.* – LAMBERT Academic Publishing. – 2013. – 121 с.

9. Малютина А. Н., Алипова К. А. *Вариации пространственных негомеоморфных отображений с s-усредненной характеристикой* // Матер. 19-й межд. Сарат. зимней школы. – Саратов: Научная книга, 2016. – С. 178–181.

10. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. *Examples of the mappings with s-averaged characteristic* // Компл. анализ и его прил.: Матер. VII Петрозаводской межд. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. – С. 12–17.

ANALOG TO THE EULER EQUATION FOR EXTREMAL MAPPINGS WITH $K_{I,S}$- OR $K_{O,S}$-AVERAGED CHARACTERISTICS

A.N. Malyutina, K.A. Alipova

In this paper we consider extremal properties of mappings with s-averaged characteristic. Variational method is developed and successfully applied for solutions of extremal problems in the theory of plane quasiconformal mappings. We suggest to apply this classical method to solve extremal problems in the class of mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: mapping with s-averaged characteristics, differential properties, variation, extremal mapping.

УДК 517.518

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИЕЙ

А.В. Макаров[1], С.И. Дудов[2]

1 *alexander-makarov93@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

2 *dudovsi@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматривается задача равномерного приближения многозначного отображения, заданного декартовым произведением двух сегментных функций, полиномиальной вектор-функцией. Сформулированные необходимые и достаточные условия решения являются обобщением результата С.И. Зуховицкого - М.Г. Крейна для приближения непрерывной вектор-функции.

Ключевые слова: равномерное приближение, многозначное отображение, полиномиальная вектор-функция, субдифференциал.

Пусть $\Phi(\cdot) : T \to 2^{R^2}$ – многозначное отображение, заданное на ограниченном замкнутом множестве $T \subset R$, со значениями, заданными в виде: